

## Całka potrójna – zamiana zmiennych

### Zamiana zmiennych w całce potrójnej

Podobnie, jak to miało miejsce w przypadku całki podwójnej, tak i przy obliczaniu całki potrójnej zastosowanie twierdzenia o zamianie zmiennych często upraszcza i skraca rachunki.

#### Twierdzenie 5. (o zamianie zmiennych w całce potrójnej)

Jeżeli przekształcenie dane równaniami:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \xi(u, v, w), \quad (3)$$

odwzorowuje przestrzenny obszar regularny  $V'$  (w przestrzeni zmiennych  $u, v$  i  $w$ ) na obszar regularny  $V$  (w przestrzeni zmiennych  $x, y$  i  $z$ ) oraz:

- 1) funkcje  $\varphi, \psi, \xi$  są ciągłe i mają ciągłe pochodne w obszarze  $V'$  i na jego brzegu,
- 2) funkcja  $f$  jest ciągła w obszarze  $V$ ,
- 3) przekształcenie (3) wnętrza obszaru  $V'$  na wnętrze obszaru  $V$  jest wzajemnie jednoznaczne,
- 4) jacobian

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial w} \end{vmatrix}$$

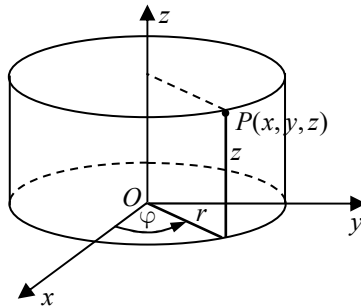
przekształcenia (3) jest różny od zera wewnątrz obszaru  $V'$ , to

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{V'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \xi(u, v, w)] \cdot |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (4)$$

Najczęściej przy stosowaniu wzoru (4) do całek potrójnych używa się współrzędnych walcowych lub sferycznych.

### Współrzędne walcowe (cylindryczne) w calce potrójnej

Współzrędnymi walcowymi (cylindrycznymi) punktu  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nazywamy trójkę liczb  $(r, \varphi, z)$ , gdzie  $(r, \varphi)$  są współzrędnymi biegunowymi rzutu prostokątnego punktu  $P$  na płaszczyznę  $Oxy$ , a  $z$  jest współzrędną kartezyjską punktu  $P$ , przy czym płaszczyzna  $Or\varphi$  pokrywa się z płaszczyzną  $Oxy$ , a oś biegunowa pokrywa się z dodatnim zwrotem osi  $Ox$ .



Rys. 4. Współzrędnne walcowe w przestrzeni

Łatwo zauważyć związki między współzrędnymi kartezyjskimi  $(x, y, z)$  i współzrędnymi walcowymi  $(r, \varphi, z)$  punktu  $P$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi , \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

gdzie  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty < z < +\infty$ .

Obliczamy jacobian przekształcenia (5):

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r .$$

Zatem w tym przypadku wzór (4) przyjmie postać:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz. \quad (6)$$

**Przykład 3.** Korzystając ze współrzędnych walcowych obliczyć całki potrójne po podanych obszarach:

- a)  $\iiint_V x dx dy dz$ ;  $V: x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$ ,
- b)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $V$  jest ograniczony powierzchniami:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  
 $z = 1$ ,

**Rozwiązanie.**

a) Przykład ten rozwiązaliśmy w poprzednim części materiałów (przykład 2c). Tym razem posłużymy się współrzędnymi walcowymi. Obszar  $V$  oraz jego rzut na płaszczyznę  $Oxy$  został zilustrowany na rysunku 4. Łatwo stwierdzić, że współrzędne walcowe dowolnego punktu obszaru  $V$  spełniają warunki:

$$V': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}.$$

Zatem obszar  $V'$  w prostokątnym układzie współrzędnych jest prostopadłością. Aby obliczyć daną całkę potrójną skorzystamy ze wzoru (6), a następnie (w celu uproszczenia obliczeń) z punktu 2<sup>o</sup> twierdzenia 4:

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \iiint_{V'} r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi dz = \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^3 dz = \\ &= \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \cdot [\sin \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot [z]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1. \end{aligned}$$

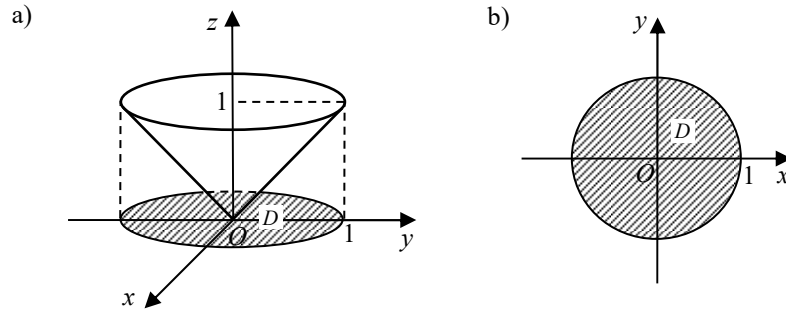
- b) Obszar przestrzenny  $V$  jest od dołu ograniczony stożkiem obrotowym, o równaniu  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a od góry płaszczyzną  $z = 1$  (rysunek 5a).

Rysunek 5b przedstawia rzut  $D$  obszaru  $V$  na płaszczyznę  $Oxy$ . Rzut ten jest kołem o promieniu równym 1, co stwierdzamy podstawiając  $z = 1$  do równania  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (czyli rozwiązujemy układ równań, aby wyznaczyć krawędź przecięcia stożka i płaszczyzny). Wprowadzamy współrzędne walcowe:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Patrząc na rysunek obszaru  $D$  łatwo stwierdzić, że współrzędne walcowe  $r, \varphi$  dowolnego punktu obszaru  $V$  spełniają warunki:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



Rys. 5. Ilustracja do przykładu 3b

Zauważmy, że współrzędna  $z$  dowolnego punktu obszaru  $V$  zmienia się od powierzchni stożka do płaszczyzny  $z=1$ . Aby wyznaczyć lewy koniec przedziału zmienności współrzędnej walcowej  $z$  (prawy jest równy 1) wstawiamy  $x = r \cos \varphi$  i  $y = r \sin \varphi$  do równania stożka i otrzymujemy:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = r.$$

Możemy zatem zapisać:

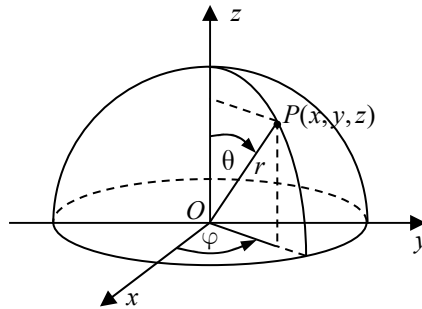
$$V' = \{(r, \varphi, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \leq z \leq 1\}.$$

Przechodzimy do obliczenia danej całki potrójnej:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz &= \iiint_{V'} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \cdot r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_{V'} r^2 dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [r^2 z]_r^1 dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{12} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

### Współrzędne sferyczne w calce potrójnej

Współzrędnymi sferycznymi punktu  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nazywamy trójkę liczb  $(r, \varphi, \theta)$ , gdzie  $r$  jest długością promienia wodzącego (odległością punktu  $P$  od początku układu współrzędnych),  $\varphi$  jest miarą kąta zawartego między osią  $Ox$ , a prostokątnym rzutem promienia wodzącego na płaszczyznę  $Oxy$ ,  $\theta$  zaś jest miarą kąta zawartego między dodatnim zwrotem osi  $Oz$ , a promieniem wodzącym (rys. 6).



Rys. 6. Współrzędne sferyczne w przestrzeni

Współrzędne kartezjańskie  $(x, y, z)$  są związane ze współzrędnymi sferycznymi  $(r, \varphi, \theta)$  zależnościami:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad (7)$$

gdzie  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 < \theta < \pi$ .

Obliczamy jacobian przekształcenia (7):

$$\begin{aligned} J(r, \varphi, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Zatem w tym przypadku wzór (4) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{V'} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

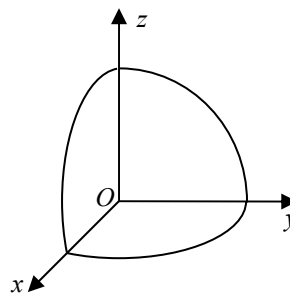
**Przykład 4.** Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całki potrójne po podanych obszarach:

- a)  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ;  $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ,
- b)  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ;  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0$ .

**Rozwiązanie.**

a) Obszar całkowania  $V$  przedstawiony jest na rysunku 7. Jest on ósmą częścią kuli o promieniu  $R=1$ . W danej całce potrójnej dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Zauważmy, że gdy punkt  $P(x, y, z)$  zmienia się w obszarze  $V$ , to jego współrzędne sferyczne spełniają nierówności:

$$V': \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Rys. 7

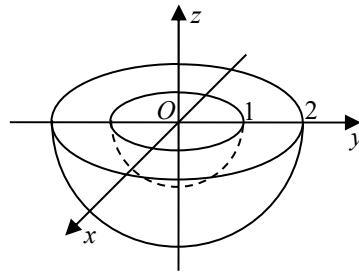
Stosując wzór (8) obliczamy daną całkę:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \\ & = \iiint_{V'} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ & = \iiint_{V'} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ & = \iiint_{V'} \sqrt{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \iiint_{V'} r^3 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 [-r^3 \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{4} [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że w powyższej całce obszar całkowania  $V'$  jest prostopadłością, a zatem kolejność całkowania nie miała tutaj znaczenia (twierdzenie 4 punkt 1°). Dodatkowo, ponieważ po dokonaniu zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne, funkcja podcałkowa jest funkcją o zmiennych rozdzielonych, to przy obliczaniu danej całki można było skorzystać ze wzoru znajdującego się w punkcie 2° twierdzenia 4 (tak ja to uczyniliśmy w przykładzie 3a).

b) Obszar całkowania  $V$  przedstawiony jest na rysunku 8. Mamy tutaj do czynienia z dolną połową obszaru ograniczonego dwiema sferami: jedną o promieniu  $R_1 = 1$ , a drugą o promieniu  $R_2 = 2$ . Określamy zakres zmienności współrzędnych sferycznych dowolnego punktu obszaru  $V$ . Ponieważ rzutem tego obszaru na płaszczyznę  $Oxy$  jest koło (o promieniu 2), to współrzędna  $\varphi$  będzie spełniała nierówność:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Łatwo



Rys. 8

ustalić, że odległość  $r$  dowolnego punktu obszaru  $V$  od początku układu współrzędnych zmienia się w przedziale:  $1 \leq r \leq 2$ , natomiast kąt zawarty między promieniem wodzącym, a dodatnim zwrotem osi  $Oz$  przyjmuje wartości:  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ . Wobec tego:

$$V' = \left\{ (r, \varphi, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

W rozważanej całce dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne, a następnie korzystamy z twierdzenia 4 (z punktu 1° lub 2°):

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V'} (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\
&= \iiint_{V'} r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\
&= \iiint_{V'} r^4 \sin^3 \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin^3 \theta d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r^4 \left[ -\frac{1}{3} \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{2}{3} \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{2}{3} r^4 dr = \\
&= \frac{2}{15} \int_0^{2\pi} [r^5]_1^2 d\varphi = \frac{2}{15} \int_0^{2\pi} (32 - 1) d\varphi = \frac{62}{15} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{124}{15} \pi.
\end{aligned}$$

W celu obliczenia całki  $\int \sin^3 \theta d\theta$  zastosowaliśmy powyżej następujący wzór rekurencyjny:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

Opracowanie:  
dr Igor Kierkosz  
dr hab. Wołodymyr Sushch